Université Paris-Diderot — Année 2013-2014

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Partiel du 19 octobre 2013

Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Questions du cours. (a) Donner la définition d'application injective, d'application surjective, d'application bijective.

(b) Donner la définition d'image directe et d'image réciproque d'un ensemble par une application.

(c) Écrire la formule du binôme de Newton. On rappelle que $C_n^k = \binom{n}{k}$ désignent les coefficients binomiaux.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos(2x)$.

(a) Décrire les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Soit $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \cos(2x)$, la réstriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

(b) Décrire les ensembles $g([0, \pi])$ et $g^{-1}(\{0\})$.

(c) Décrire l'ensemble $g^{-1}([0, \frac{1}{2}])$.

Soient maintenant E, F deux ensembles, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ parties de E, et $h : E \to F$ une application.

(d) Montrer que $h(A \cap B) \subseteq h(A) \cap h(B)$.

(e) Trouver deux intervalles $I, J \subset [0, \pi]$ tels que $g(I \cap J) \neq g(I) \cap g(J)$.

Exercice 2. (a) Exprimer les racines 3-ièmes de l'unité en formes exponentielle, trigonométrique et cartésienne.

(b) Exprimer les racines 3-ièmes de $2 + 2\mathrm{i}$ en formes exponentielle et trigonométrique.

(c) À l'aide du point (a), exprimer les racine 3-ièmes de $2 + 2\mathrm{i}$ en forme cartésienne.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(e) Exprimer $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(f) Linéariser $\cos^3\alpha$.

(g) Vérifier les formules des points (e) et (f) pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Exercice 3. (a) Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{i}z^2 - (2 + \mathrm{i})z + 2 = 0.$$

(b) À l'aide du point (a), trouver les nombres complexes $w \in \mathbb{C}$ tels que

$$\mathrm{i}w^4 - (2 + \mathrm{i})w^2 + 2 = 0.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z^2 + 2\mathrm{i}(z - 1)$.

(a) Déterminer si f est injective, surjective, bijective.

(b) Déterminer l'ensemble $\mathrm{Fix}(f) := \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}$ des éléements fixés par f.

Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \mathrm{i}z - \mathrm{i} + 1$.

(c) Montrer que g est bijective, et écrire la bijection réciproque g^{-1}.

(d) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(\mathrm{Fix}(f))$.

(e) Donner une interprétation géométrique à la transformation g. Est-elle une translation, une rotation, une homothétie ?